



ce
pre
UNI

Geometría

DIVISIÓN DE UN SEGMENTO EN MEDIA Y EXTREMA RAZÓN

**CICLO
PRE
2024-1**



DIVISIÓN DE UN SEGMENTO EN MEDIA Y EXTREMA RAZÓN

Definición. Un punto divide a un segmento dado en media y extrema razón, si la longitud del segmento mayor determinado por el punto es media proporcional entre la longitud del segmento menor y la longitud del segmento dado.

Dado el segmento $\overline{AB}$ y P un punto de $\overline{AB}$ tal que $AP > PB$



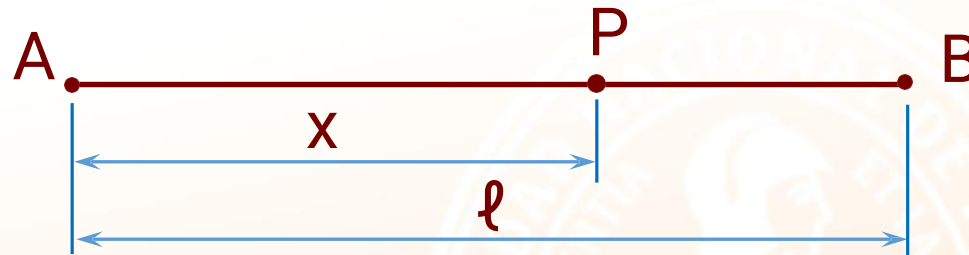
El punto P divide en media y extrema razón al $\overline{AB}$, cuando se cumple:

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AB}{AP}$$

LONGITUD DE LA SECCIÓN ÁUREA DE UN SEGMENTO

Sea P un punto de $\overline{AB}$, $\overline{AP}$ es la sección áurea de $\overline{AB}$, si $\frac{AP}{PB} = \frac{AB}{AP}$

Sea $AB = \ell$ y $AP = x$



Por definición:

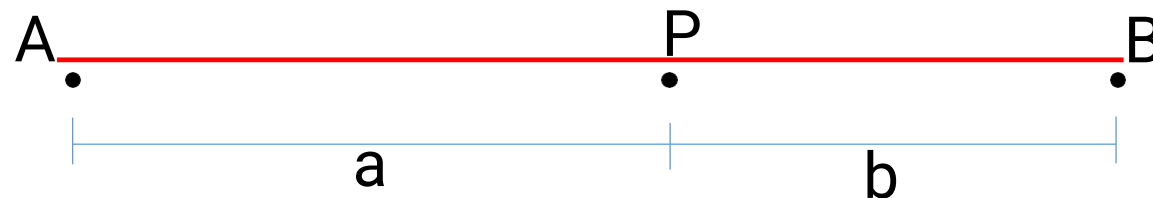
$$\frac{AP}{PB} = \frac{AB}{AP}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\ell - x} = \frac{\ell}{x} \Rightarrow x^2 + \ell x = \ell^2$$

. Despejando:

$$AP = \ell(\sqrt{5} - 1)/2$$

DIVISIÓN DE UN SEGMENTO EN MEDIA Y EXTREMA RAZÓN



Si P divide en media y extrema razón al segmento AB, entonces por

definición: $\frac{AP}{PB} = \frac{AB}{AP}$

Se reemplaza en la definición: $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} = \phi \rightarrow \phi^2 - \phi = 1$

efectuando: $\phi = (\sqrt{5} + 1)/2$ (número áureo o número de oro)

Definición. El número de oro o número áureo, es un número irracional

denotado por la letra phi (ϕ), el valor es $\phi = \frac{(\sqrt{5} + 1)}{2}$

EJERCICIO 01

En un segmento AB se ubica el punto P tal que, $\overline{AP}$ es la sección áurea de $\overline{AB}$. Si Q es un punto del $\overline{AP}$ tal que $AQ = PB$ y $AB = \ell$, entonces QP es

A) $\sqrt{5} \ell$

D) $\sqrt{7} \ell$

B) $(\sqrt{3} + 1)\ell$

E) $\frac{P}{3}$

C) $(\sqrt{5} - 2)\ell$

RESOLUCIÓN 01

En un segmento $\overline{AB}$ se ubica el punto P tal que, $\overline{AP}$ es la sección áurea de $\overline{AB}$. Si Q es un punto del $\overline{AP}$ tal que $AQ = PB$ y $AB = \ell$, entonces QP es

Datos: $P \in \overline{AB}$, $Q \in \overline{AP}$, $AB = \ell$,
 $\overline{AP}$ es la sección áurea de $\overline{AB}$:

$$AP = \frac{P(\sqrt{5} - 1)}{2} \text{ y } AQ = PB = a$$

Incógnita: $QP = x$

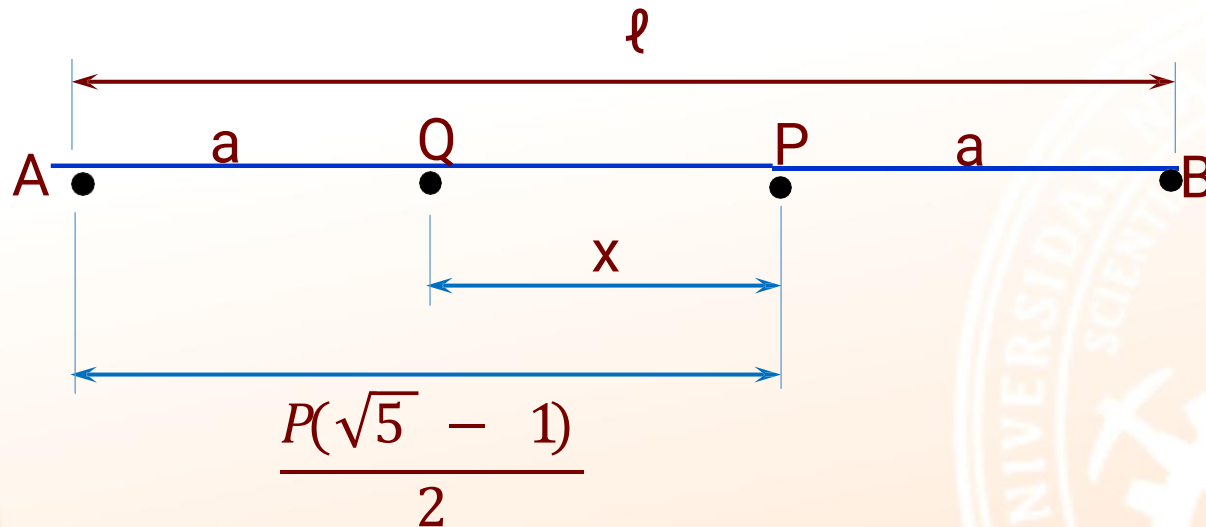
En el gráfico:

$$x + a = \frac{P(\sqrt{5} - 1)}{2} \dots (1)$$

$$x + 2a = \ell \dots (2)$$

$$\text{De (1) y (2): } x = \ell(\sqrt{5} - 2)$$

Clave: C





ce
pre
UNI

TEORÍA

Geometría

POLÍGONOS REGULARES
NOTABLES INSCRITOS

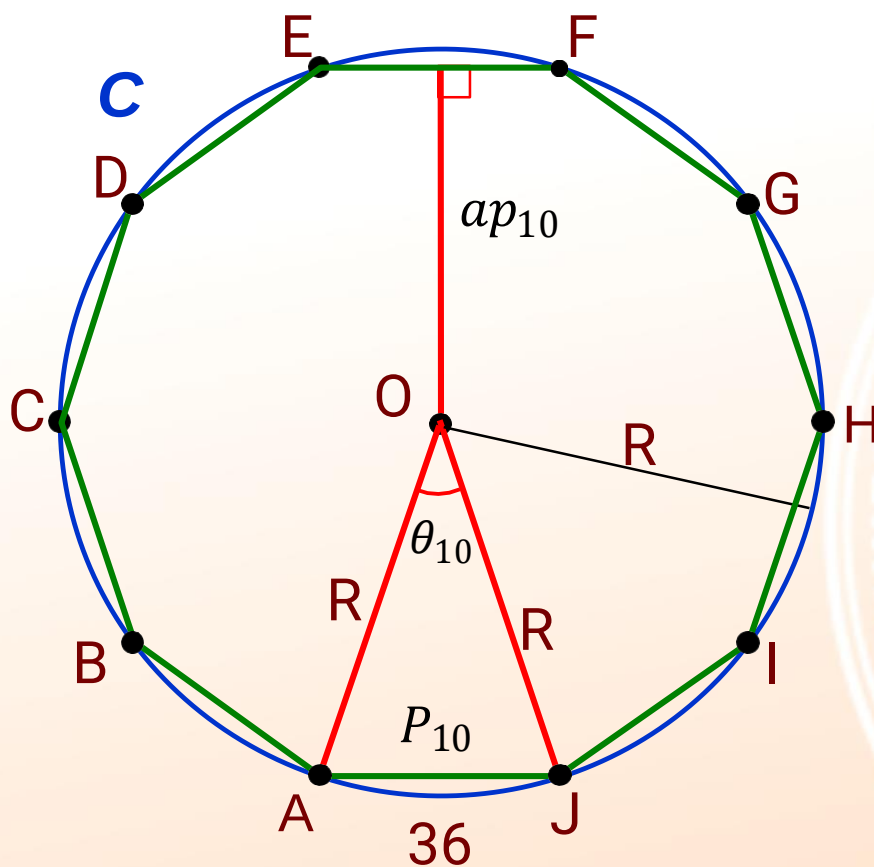
l_5 y l_{10}

CICLO
PRE
2024-1



DECÁGONO REGULAR

El decágono regular ABCDEFGHIJ, está inscrito en la circunferencia de centro O y longitud del radio R.



Medida del ángulo central:

$$\theta_{10} = 36$$

Longitud del lado:

$$l_{10} = \frac{R}{2} (\sqrt{5} - 1)$$

Longitud del apotema:

$$ap_{10} = \frac{R}{4} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$$

EJERCICIO 02

En un polígono regular de 10 lados $ABCDEF\dots$, se ubica Q en $\overline{BF}$ tal que QF es igual a la longitud de la sección áurea del $\overline{BQ}$. Si $BQ = \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} u$, entonces la longitud del lado del polígono es

A) $\frac{1}{2}$

D) $\sqrt{5} - 1$

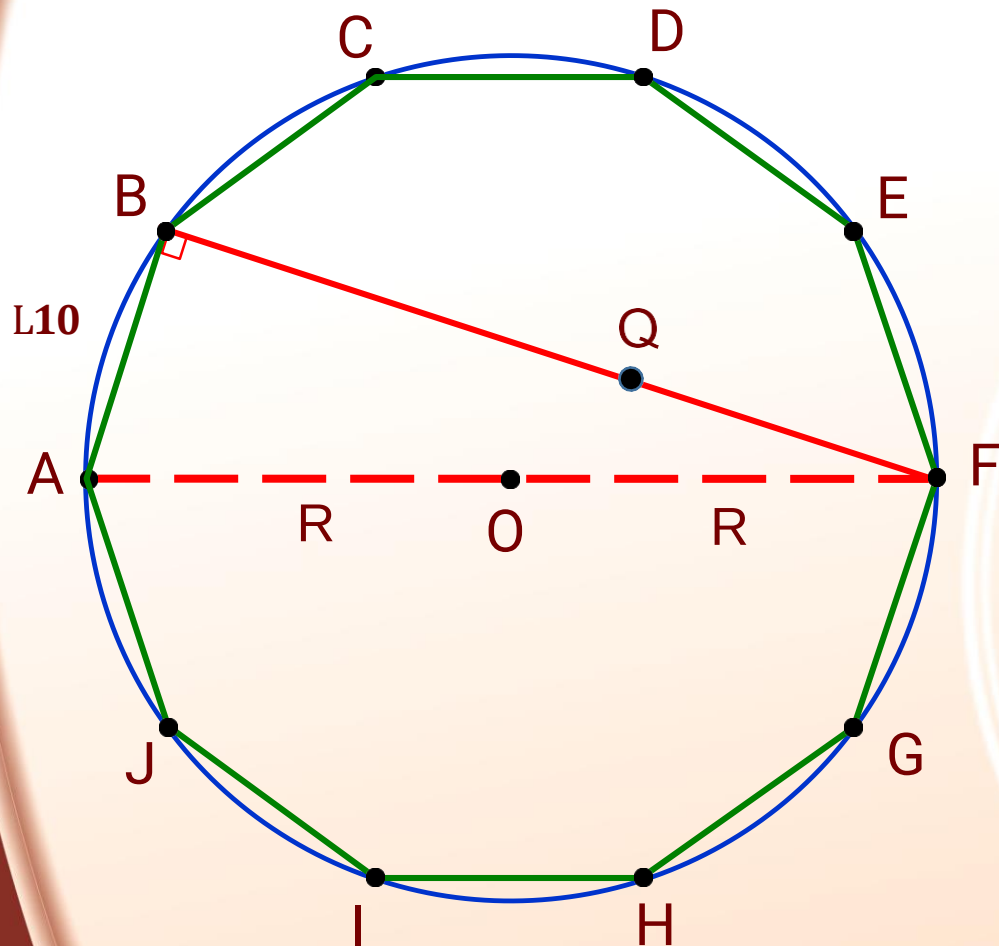
B) $\sqrt{2} - 1$

E) $\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$

C) $\sqrt{3} - 1$

RESOLUCIÓN 02

En un polígono regular de 10 lados $ABCDEF\dots$, se ubica Q en $\overline{BF}$ tal que QF es igual a la longitud de la sección áurea del $\overline{BQ}$. Si $BQ = \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$ u, entonces la longitud del lado del polígono es.



En la circunferencia de centro O y longitud de radio R se inscribe el decágono regular

Datos: $\overline{QF}$ es sección aurea de $\overline{BQ}$

$$QF = \frac{BQ(\sqrt{5}-1)}{2} \quad \text{y} \quad BQ = \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

$$\text{Calcule } L_{10} = \frac{R(\sqrt{5}-1)}{2}$$

$$\text{Del dato: } BF = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}(\sqrt{5}+1)}{2} \dots (1)$$

$\triangle ABF$: teorema de Pitágoras

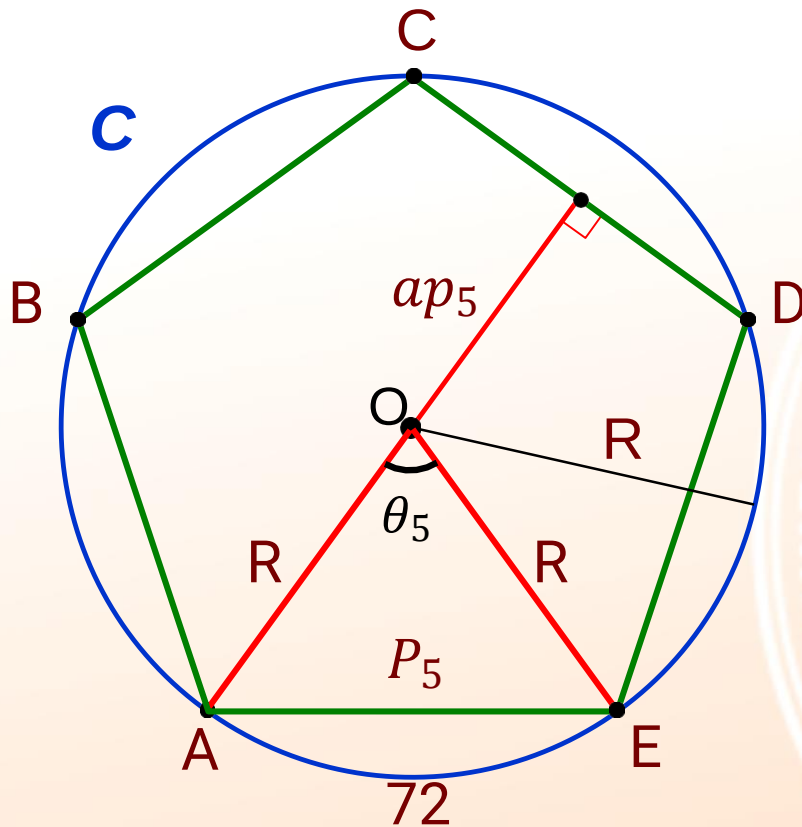
$$(BF)^2 + (L_{10})^2 = 4R^2 \dots (2)$$

$$\text{De (1) y (2): } L_{10} = \sqrt{5} - 1$$

Clave: B

PENTÁGONO REGULAR

El pentágono regular ABCDE, está inscrito en la circunferencia de centro O y longitud del radio R.



Medida del ángulo central:

$$\theta_5 = 72$$

Longitud del lado:

$$\ell_5 = \frac{R}{2} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

Longitud del apotema:

$$ap_5 = \frac{R}{4} (\sqrt{5} + 1)$$

EJERCICIO 03

En un pentágono regular, la longitud de su lado es L u. Calcule (en u) la longitud del lado del pentágono que se forma al trazar las diagonales.

A) $\frac{L(3 - \sqrt{5})}{2}$

D) $\frac{L(3 - \sqrt{5})}{3}$

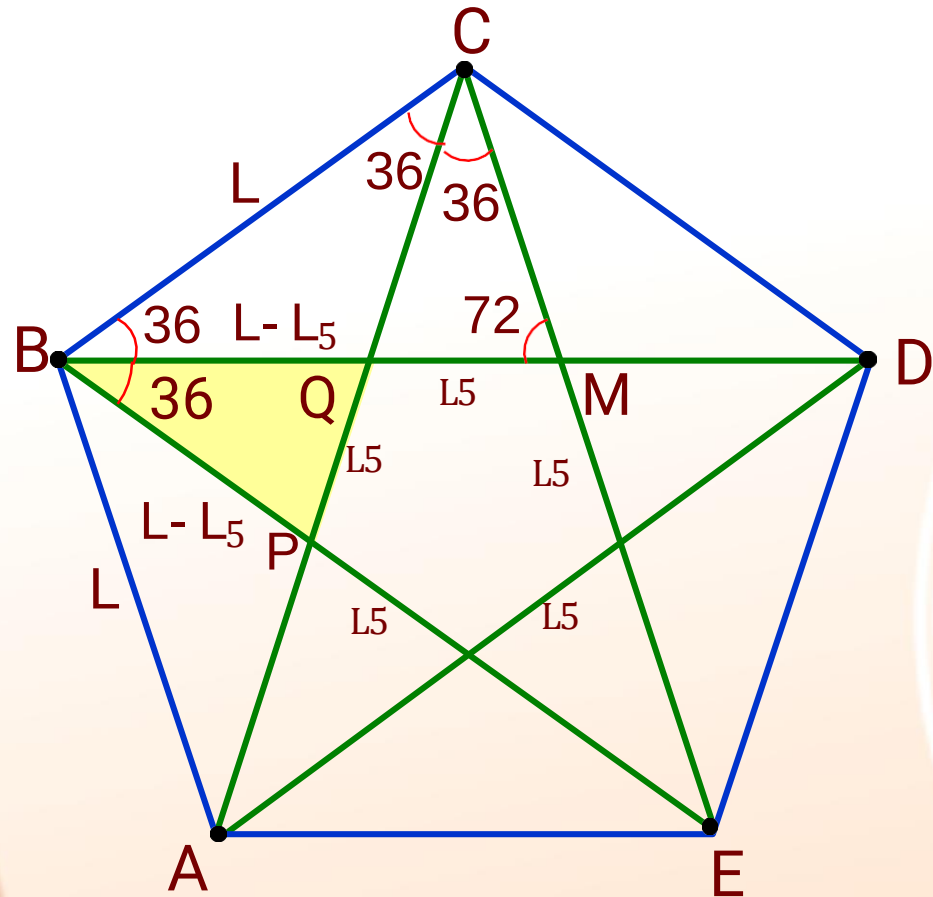
B) $\frac{L(3 + \sqrt{5})}{2}$

E) $\frac{L(3 + \sqrt{5})}{4}$

C) $\frac{L(3 - \sqrt{5})}{4}$

RESOLUCIÓN 03

En un pentágono regular, la longitud de su lado es L u, calcule, en u la longitud del lado del pentágono que se forma al trazar las diagonales.



En el pentágono regular $ABCDE$ se trazan las diagonales y se determina en el interior un pentágono regular

Calcule: L_5

Dato: $AB = BC = L$

El $\triangle BCM$ es isósceles: $BC = BM = L$

Luego $BQ = L - L_5$

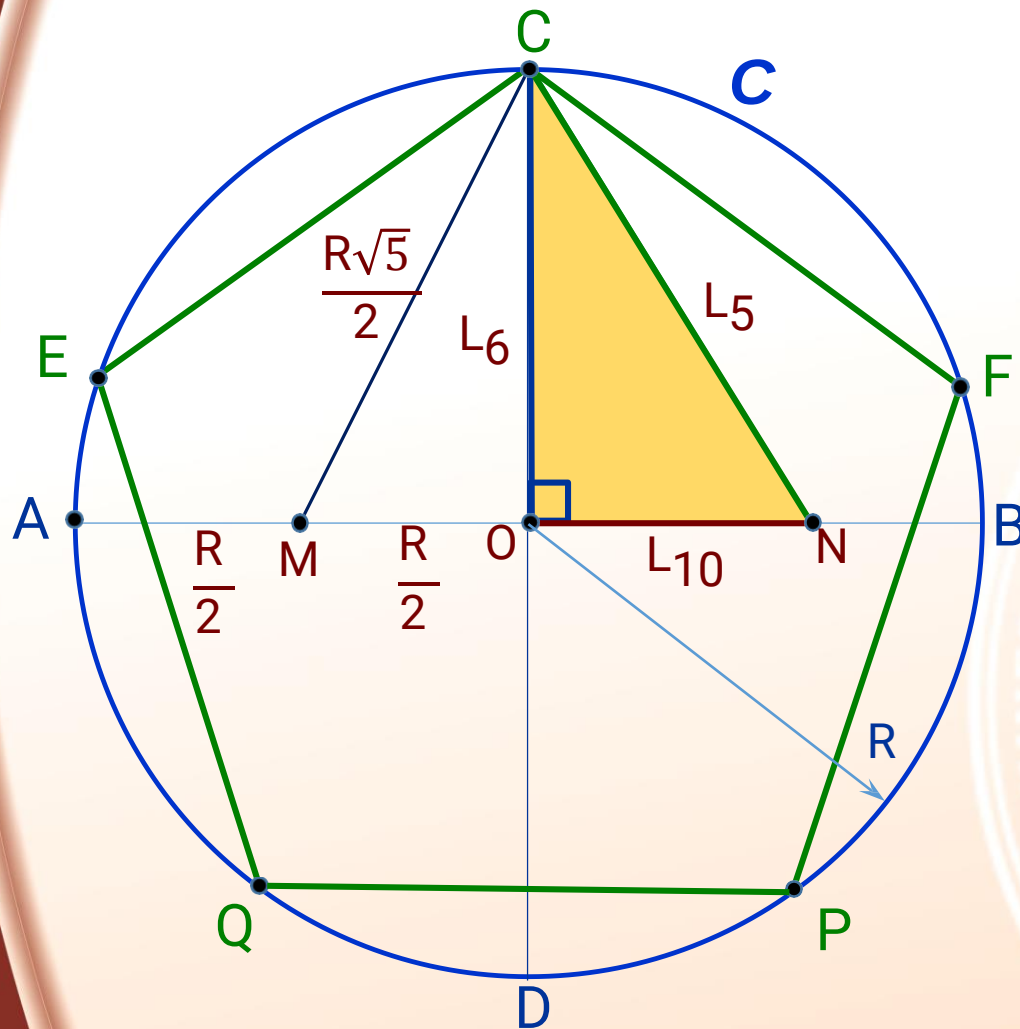
El $\triangle PBQ$ es isósceles: $PQ = L_5$

$$\rightarrow L_5 = \frac{(L - L_5)(\sqrt{5} - 1)}{2}$$

$$\text{Despejando: } L_5 = \frac{L(3 - \sqrt{5})}{2}$$

Clave: A

CONSTRUCCIÓN GEOMÉTRICA DE UN PENTÁGONO REGULAR



O es centro de la C de longitud de radio R

Sea M punto medio de $\overline{AO}$, $AM = MO = \frac{R}{2}$

Con centro en M y radio $\overline{MC}$ se traza el arco de circunferencia que interseca a $\overline{OB}$

en N : $MC = \frac{R\sqrt{5}}{2}$

Con centro en C y radio $\overline{CN}$ se traza el arco de circunferencia que interseca a la circunferencia C en los puntos E y F .

Luego $ECFPQ$ es el pentágono regular

Relación entre L_6
 L_{10} y L_5 en C

$$L_6^2 + L_{10}^2 = L_5^2$$